

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВСП «Ковельський промислово – економічний фаховий коледж ЛНТУ»

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМООЦІНЮВАННЯ

Галузь знань D Бізнес, адміністрування та право / 07 Управління та адміністрування

Оцінювання за національною шкалою:	Критерії та визначення оцінювання
5 (відмінно)	Здобувач освіти вільно володіє визначеним програмою навчальним матеріалом, виявляє здібності, вміє самотійно поставити мету дослідження, вказує шляхи її реалізації, робить аналіз та висновки; усвідомлює нові для нього математичні факти, ідеї, вміє доводити передбачені програмою математичні твердження з достатнім обґрунтуванням. Здобувач освіти уміло послуговується науковою термінологією, вміє опрацьовувати наукову інформацію (знаходити нові факти, явища, ідеї, самотійно використовувати їх відповідно до поставленої мети тощо).
4 (добре)	Здобувач освіти вільно володіє вивченим матеріалом у стандартних ситуаціях, наводить приклади його практичного застосування та аргументи на підтвердження власних думок. Здобувач освіти уміє пояснювати явища, аналізувати, узагальнювати знання, систематизувати їх, зі сторонньою допомогою (викладача, однокласників тощо) робити висновки.
3 (задовільно)	Здобувач освіти може зі сторонньою допомогою пояснювати явища, виправляти допущені неточності (власні, інших учнів). Здобувач освіти за допомогою викладача описує явища, без пояснень наводить приклади, що ґрунтуються на його власних спостереженнях чи матеріалі підручника, розповідях викладача тощо. Здобувач освіти ілюструє означення математичних понять, формулювань теорем і правил виконання математичних дій власними прикладами.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМООЦІНЮВАННЯ

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри

1. Знайти матрицю $C=2A-3B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Користуючись означеннями операцій множення матриці на число та додавання матриць, послідовно знаходимо:

$$2A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & 4 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & -1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad 3B = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 & 2 \cdot 3 & 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot 3 & -7 \cdot 3 & 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{N} = 2A - 3B &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 & 6-6 & 8-15 \\ 4-9 & 0-(-21) & -2-12 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ -5 & 21 & -14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Для заданих матриць обчислити AB і BA , якщо це можливо:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Розв'язання:

Оскільки кількість стовпців матриці A не дорівнює кількості рядків матриці B то добуток AB не існує. Проте можна обчислити добуток BA .

$$\hat{A}\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-2) & -3+4 \\ 3+(-4) & -9+8 \\ 5+(-6) & -15+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

а) Використовуючи формулу для обчислення визначника другого порядку, маємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-6) \cdot 3 = 2 + 18 = 20$$

б) Користуючись правилом трикутника, знаходимо

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 30 - 2 - 12 - 9 - 10 - 8 = -11.$$

4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами першого рядка.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 2 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 - 24 - 2(-6 - 18) +$$

$$+ 5(-8 - 3) = -21 + 48 - 55 = -28.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Розв'язання:

Знайдемо визначник матриці: $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$. Оскільки $\Delta = -5 \neq 0$,

обернена матриця A^{-1} існує. Знаходимо алгебричні доповнення: $A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$. Тоді обернена матриця буде мати вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

6. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання:

а) Заходимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0, \text{ тому система має єдиний розв'язок.}$$

$$\text{Знаходимо } \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 6 = -14; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21.$$

За формулами Крамера, маємо:

$$x_1 = \frac{-14}{-7} = 2, \quad x_2 = \frac{-21}{-7} = 3.$$

7. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 17, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання:

Запишемо дану систему рівнянь у матричній формі: $A \cdot X = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 3 - 90 - 24 + 18 - 10 = -87 \neq 0, \text{ значить матриця } A \text{ має обернену матрицю.}$$

Знайдемо алгебричні доповнення елементів матриці A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -24, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 20,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -19, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{87} \begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись рівністю $X = A^{-1} \cdot B$, знаходимо розв'язок системи:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{87} \begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{87} \begin{pmatrix} 3 \cdot 17 - 24 \cdot (-3) - 21 \cdot 10 \\ -7 \cdot 17 - 2 \cdot (-3) + 20 \cdot 10 \\ -19 \cdot 17 + 7 \cdot (-3) + 17 \cdot 10 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{87} \begin{pmatrix} -87 \\ 87 \\ -174 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$ - шуканий розв'язок.

Розділ Диференціювання функції однієї змінної

1. Знайти похідну функції $y = x^3 e^x$

Розв'язання. $y' = (x^3 e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x$

2. Знайти похідну функції $y = 5\sqrt[3]{x} - 4^x + \frac{3}{x^2} - 7$

Розв'язання.

$$y' = (5x^{\frac{1}{3}} - 4^x + 3x^{-2} - 7)' = \frac{5}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 4^x \ln x - 6x^{-2-1} = \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 4^x \ln x - 6x^{-3}$$

$$= \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} - 4^x \ln x - \frac{6}{x^3}$$

3. Знайти похідну функції $y = \frac{\cos x}{x^2}$

Розв'язання. $y' = \left(\frac{\cos x}{x^2}\right)' = \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{x^4}$

4. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x}{x^2 - 25}$ та побудувати її графік.

1) Знайдемо область визначення функції. Необхідно знайти ті точки, в яких знаменник дробу дорівнює нулю і виключити їх. Одержимо

$$x^2 - 25 \neq 0, \quad x^2 \neq 25, \quad x_{1,2} \neq \pm 5. \text{ Функція визначена в інтервалах } (-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty).$$

2) Функція непарна. Тому її графік симетричний відносно початку координат. Функція не є періодичною. Це впливає навіть з того, що вона невизначена лише у двох точках.

3) Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат: при $x=0$, $y=0$, при $y=0$, $x=0$. Інших точок не існує.

4) Дослідимо функцію на монотонність та критичні точки. Для цього знайдемо першу похідну функції. Маємо:

$$y' = \frac{x^2 - 25 - 2x^2}{(x^2 - 25)^2} = \frac{-25 - x^2}{(x^2 - 25)^2} = -\frac{x^2 + 25}{(x^2 - 25)^2};$$



$$y' = 0 \Rightarrow x^2 + 25 = 0 \Rightarrow x^2 \neq -25, \quad x^2 + 25 > 0.$$

$$\text{Тоді } y' = -\frac{x^2 + 25}{(x^2 - 25)^2} < 0 \text{ для всіх } x \text{ із області неперервності.}$$

Тобто функція спадна на кожному інтервалі області визначення.

5) Дослідимо функцію на опуклість та точки перегину. Для цього знайдемо другу похідну.

$$y'' = \frac{-2x(x^2 - 25)^2 - 2(x^2 - 25) \cdot 2x(x^2 + 25)}{(x^2 - 25)^4} = \frac{-2x(x^2 - 25 - 2x^2 - 50)}{(x^2 - 25)^3} = \frac{2x(x^2 + 75)}{(x^2 - 25)^3}$$

$$\text{Прирівняємо } y'' = 0. \text{ Одержимо } 2x(x^2 + 75) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x^2 \neq -75;$$

$x=0$ – критична точка.

Знайдемо знак другої похідної в кожному з інтервалів $(-\infty; -5)$; $(-5; 0)$; $(0; 5)$; $(5; +\infty)$. На проміжках $(-\infty; -5)$, $(0; 5)$ $y''(x) < 0$ – графік функції опуклий вгору; на проміжках $(-5; 0)$, $(5; +\infty)$ $y''(x) > 0$ – графік функції опуклий вниз.

Точка $y(0) = 0$ є точкою перегину графіка функції.

Розділ 3. Інтегральне числення функцій однієї змінної

1. Знайти інтеграл $\int (10x^3 + \cos 3x) dx$

Розв'язання. $\int (10x^3 + \cos 3x) dx = \int 10x^3 dx + \int \cos 3x dx = 10 \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3} \sin 3x + C$

2. Знайти інтеграл $\int \operatorname{tg} x dx$

Розв'язання. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ -du = \sin x dx \end{array} \right| = \int -\frac{du}{u} = -\ln|u| + C =$
 $= \ln|\cos x| + C.$

3. Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{2x} dx$.

Розв'язання. При обчисленні визначеного інтеграла за формулою Ньютона-Лейбніца необхідно знайти первісну функцію для функції e^{2x} . Одержимо

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e^{2 \cdot 1} - e^0) = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

4. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = 4 - x^2$ та $y = 4 - 2x$.

Розв'язання. Зобразимо фігуру.

Знайдемо точки перетину ліній. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 4 - 2x, \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = 4 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0, \quad x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Площа фігури дорівнює різниці площ двох криволінійних трапецій, площі яких обчислимо за формулою. Одержимо

$$\begin{aligned} S &= S_2 - S_1 = \int_0^2 (4 - x^2) dx - \int_0^2 (4 - 2x) dx = \\ &= \int_0^2 (4 - x^2 - 4 + 2x) dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \\ &= \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

